

Tugas 2 Analisis I (F)

Tugas : Buktikan Teorema 6 dan 7 dengan kalimat sendiri

► TEOREMA 6

misal $a, b, c \in \mathbb{R}$

(a). Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$

(b). Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$

(c) Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$
Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$

Pembuktian :

► (a). Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$

Akan ditunjukkan dengan pembuktian langsung
asumsikan P, beri langkah pembuktian, apabila terbukti Q, maka $P \rightarrow Q$ benar.

Jawab :

→ Asumsikan $a > b$ dan $b > c$

① Sesuai definisi 5 bagian (a), ketika $a - b \in \mathbb{P}$ (dengan $\mathbb{P}$ himpunan bilangan real positif), maka $a > b$. Sehingga, haruslah $a - b \in \mathbb{P}$ serta $b - c \in \mathbb{P}$.

② Berdasarkan Definisi 4 bagian 01., ketika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a + b \in \mathbb{P}$. Karena pada langkah ① terbukti $(a - b), (b - c) \in \mathbb{P}$, maka $(a - b) + (b - c)$ juga anggota $\mathbb{P}$. Diperoleh hasil $(a - b) + (b - c)$ adalah $a - c$.

③ Pada langkah ② terbukti $a - c \in \mathbb{P}$. Maka berdasarkan Definisi 5 bagian (a) maka $a > c$

∴ Terbukti bahwa jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

► (b). Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$

① Sesuai definisi 5 bagian (a), ketika $a - b \in \mathbb{P}$ (dengan $\mathbb{P}$ himpunan bilangan real positif), maka $a > b$. Sehingga, haruslah $a - b \in \mathbb{P}$.

② Bentuk $a - b$ dapat dimanipulasi sedemikian hingga terbentuk $(a + c) - (b + c) > 0$

③ Sesuai Definisi 5 bagian (a), ketika $(a + c) - (b + c) > 0$ atau $(a + c) - (b + c) \in \mathbb{P}$ maka $(a + c) > (b + c)$.

∴ Terbukti bahwa jika $a > b$, maka $a + b > b + c$

► (c). Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$

① Sesuai definisi 5 bagian (a), ketika $a - b \in \mathbb{P}$ (dengan $\mathbb{P}$ himpunan bil. real positif), maka $a > b$. Sehingga haruslah $a - b \in \mathbb{P}$.

② $a - b \in \mathbb{P}$ dan $c \in \mathbb{P}$. Berdasarkan definisi 4 bagian 02, ketika $(a - b), c \in \mathbb{P}$, maka $(a - b)c = ca - cb \in \mathbb{P}$ juga.

③ Sesuai definisi 5 bagian (a), jika $ca - cb \in \mathbb{P}$, maka $ca > cb$.

∴ Jadi, terbukti bahwa jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$

► (c). Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$

① Sesuai definisi 5 bagian (a), ketika $a - b \in \mathbb{P}$ (dengan $\mathbb{P}$ himpunan bil. real positif) maka $a > b$. Sehingga, pastilah $a - b \in \mathbb{P}$.

② Karena $c < 0$, maka sesuai definisi 4 bagian 03, pastilah $-c \in \mathbb{P}$. Dan dari ① diperoleh $a - b \in \mathbb{P}$.

③ $a - b \in \mathbb{P}$ dan $-c \in \mathbb{P}$. Maka berdasarkan definisi 4 bagian 02, ketika $(a - b), (-c) \in \mathbb{P}$ maka $(a - b)(-c) \in \mathbb{P} \Rightarrow -ca + cb \in \mathbb{P}$
 $= cb - ca \in \mathbb{P}$

④ Sesuai definisi 5 bagian (a), jika $cb - ca \in \mathbb{P}$, maka $cb > ca$.

∴ Terbukti bahwa jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$

► TEOREMA 7

- (a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$
(b) $1 > 0$
(c) Jika $n \in \mathbb{N}$ maka $n > 0$

Pembuktian

► (a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$

① Berdasarkan sifat trikotomi atau definisi 3 bagian 03, ketika $a \neq 0$, pastilah $a \in \mathbb{P}$ atau $-a \in \mathbb{P}$.

② Dengan definisi 4 bagian (02), akan dapat diamati bahwa ketika :

• $a \in \mathbb{P}$

maka $a^2 = a \cdot a \in \mathbb{P}$

• $-a \in \mathbb{P}$

maka $a^2 = (-a)(-a) \in \mathbb{P}$

③ Dapat disimpulkan ketika $a \neq 0$, maka pastilah $a^2 \in \mathbb{P}$.

$\therefore$ Terbukti bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$

► (b) $1 > 0$

① Pada bagian (a) terbukti bahwa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$

② Substitusi 1 ke a, sehingga $1^2 > 0, 1 > 0$

$\therefore$ Terbukti bahwa $1 > 0$

► (c) Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$

① Selesaikan dengan induksi matematika.

Untuk $n=1$ telah terbukti benar berdasarkan hasil bagian (b) $\rightarrow 1 > 0$

② Asumsikan untuk $n=k$ benar, maka $k \in \mathbb{P}$.

Sehingga $k+1 \in \mathbb{P}$ (Sesuai definisi 4 bagian (01)).

③ Karena $k+1 \in \mathbb{P}$, di mana $\mathbb{P}$ himpunan bil real positif, karena $\mathbb{P}$ pasti > 0 , maka pastilah

$n > 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ Terbukti, jika $n \in \mathbb{N}$ maka $n > 0$